

## TEMA NR. 6

pagina 1

### FORME BILINIARE, FORME LINIARE ȘI FORME PĂTRATICE

#### Probleme rezolvate

- ①. Să se aducă la forma canonică prin ~~trei~~ metode, forma pătratică  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin
- $$h(\vec{x}) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$
- determinându-se totodată și baza în care, prin metoda folosită, forma pătratică  $h(\vec{x})$  are expresie (formă) canonică.

Rezolvare. O formă pătratică se scrie, într-o bază dată, în felul următor:

$$h(\vec{x}) = \underline{X}^T \underline{G} \underline{X},$$

unde  $\underline{X}$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\vec{x}$  în baza care rezultă din enunț, iar  $\underline{G}$  este o matrice pătratică simetrică,  $\underline{G} = \underline{G}^T$ , de ordin egal cu dimensiunea spațiului pe care este definită funcția  $h$ .

În fond, o formă pătratică este o funcție reală de  $n$  variabile reale, de o expresie particulară (polinom omogen de gradul 2 în variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

Amintim că o astfel de formă pătratică <sup>(poate fi)</sup> este valoarea în perechea  $(\vec{h}, \vec{h})$ ,  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , a diferențialei a doua <sup>în  $\vec{x}_0$</sup>  a funcției

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

notată  $d^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}, \vec{h}) = d^2 f(\vec{x}_0; \vec{h}, \vec{h}) = \mathcal{Q}(\vec{h})$ , unde

# TEMA NR. 6

pagina 2

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{h}) = & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}_0) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}_0) h_1 h_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) h_1 h_n + \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{x}_0) h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\vec{x}_0) h_2 h_3 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}_0) h_2 h_n + \\ & \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x}_0) h_n^2 \end{aligned}$$

Matricea  $G$  a primei pătratică  $\varphi(\vec{h})$  a fost notată în semestrul I cu  $H_f(\vec{x}_0)$  și s-a numit "hessiană" funcției  $f$  în punctul staționar ( $df(\vec{x}_0) = 0$ )  $\vec{x}_0$ . Dacă elementele lui  $G$  sunt  $g_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , atunci:

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0) = g_{ji}.$$

În cazul problemei enunțate, matricea  $G$  este

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Efectuând  $\det G$ , constatăm că  $\det G = 80 \neq 0$  deci forma pătratică dată este nedegenerată sau, altfel spus, are rangul egal cu dimensiunea spațiului, adică 3. Tot atât este și rang  $G$ .

Prin urmare în expresia canonică pe care o vom găsi pentru o metodă dintre cele cunoscute, numărul pătratelor va fi 3, adică  $h(\vec{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2$ .

Să folosim întâi metoda valorilor și vectorilor proprii. Trebuie să determinăm mai întâi valorile proprii ale operatorului

# TEMA NR. 6

pagina 3

liniar  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  care în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  are matricea  $G$ . Expresa lui  $T(\vec{x})$  este

$$T(\vec{x}) = (5x_1 - 2x_2 - 2x_3, -2x_1 + 6x_2, -2x_1 + 4x_3).$$

Polinomul caracteristic  $P(\lambda)$  se știe că este

$$P(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Acesta se obține calculând determinantul matricei ~~obținută~~ din  $G$  prin scăderea lui  $\lambda$  pe diagonala principală.

Se găsește

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 68\lambda + 80$$

Pă remarcăm că acest polinom caracteristic are drept coeficienți:

- coeficientul lui  $\lambda^3$  este  $(-1)^3 = -1$ ;
- coeficientul lui  $\lambda^2$  este  $(-1)^2 \text{tr } G = \text{tr } G$ , unde "tr" înseamnă "urma" matricei  $G$ , adică suma elementelor de pe diagonala sa principală;
- coeficientul lui  $\lambda$  este  $(-1)^2$  suma tuturor numerelor de ordinul 2 care au diagonala principală extrasă din diagonala lui  $G$ , adică

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 + 16 + 24 = 66;$$

- coeficientul lui  $\lambda^0$  (termenul liber) este  $(-1)^0 \cdot \det G$ , adică 80.

Ecuația  $P(\lambda) = 0$  se numește ecuație caracteristică.

# TEMA NR. 6

pagina 4

După înmulțirea cu  $(-1)$ , obținem

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 66\lambda - 80 = 0$$

Folosind "schema lui Horner" găsim că rădăcinile sunt  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = 8$ . Aceste rădăcini sunt valorile proprii căutate.

Determinăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii găsite. Trebuie să rezolvăm sistemele liniare omogene:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_3)\mathbf{X} = \mathbf{0}; (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_3)\mathbf{X} = \mathbf{0}; (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}_3)\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

în care  $\mathbf{I}_3$  este matricea unitate de ordin 3, iar  $\mathbf{X}$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\vec{x}$  în baza canonică  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ . Aceste sisteme sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0 \end{array} \right.$$

și au soluțiile

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{array} \right., \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta \\ x_2 = 2\beta \\ x_3 = -2\beta \end{array} \right., \beta \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2\gamma \\ x_2 = 2\gamma \\ x_3 = \gamma \end{array} \right., \gamma \in \mathbb{R}$$

Subspațiile invariante sunt  $S_T(\lambda_1) = \{ \vec{x} = \alpha(2, 1, 2), \alpha \in \mathbb{R} \}$

$S_T(\lambda_2) = \{ \vec{x} = \beta(1, 2, -2), \beta \in \mathbb{R} \}$  și

$S_T(\lambda_3) = \{ \vec{x} = \gamma(-2, 2, 1) | \gamma \in \mathbb{R} \}.$

Fiecare dintre ele are dimensiunea 1

0 Bază în fiecare dintre ele este formată din câte un vector propriu corespunzător. Luăm  $\alpha = \beta = 1$  și  $\gamma = -1 \Rightarrow$

# TEMA NR. 6

pagina 5

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = (2, 1, 2), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, -2), \quad \vec{v}_3 = (2, -2, -1)$$

Avem că

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 = 2 \vec{v}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2 = 5 \vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3 = 8 \vec{v}_3,$$

conform definiției vectorului propriu.

Matricea  $C$  de trecere de la baza  $B$  la sistemul de vectori proprii  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  este

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = -27 \neq 0 \Rightarrow B' \text{ bază în } \mathbb{R}^3$$

Matricea lui  $T$  în baza  $B'$  are forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

fapt ce se poate verifica folosind formula

$$B = C^{-1} G C.$$

În baza  $B'$  forma pătratică dată are expresia

$$(*) \quad h(\vec{x}') = 2x_1'^2 + 5x_2'^2 + 8x_3'^2$$

Toate pătratele sunt pozitive.

Numărul pătratelor este 3, cât dimensiunea spațiului  $\mathbb{R}^3$ . Concluzia: forma pătratică dată este pozitiv definită.

Să mai menționăm că în  $(*)$   $x_1', x_2', x_3'$  sunt coordonatele vectorului  $\vec{x}$  în baza  $B'$ , adică

## TEMA NR. 6

pagina 6

$$\vec{x} = x'_1 \vec{v}_1 + x'_2 \vec{v}_2 + x'_3 \vec{v}_3 \quad \text{sau} \quad \vec{x} = (x'_1, x'_2, x'_3)_{B'}$$

Se știe că aceste coordonate sunt egale de vechile coordonate  $x_1, x_2, x_3$  prin relat.

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \boxed{\underline{X}' = C^{-1} \underline{X}}; \quad \underline{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Prin urmare, dacă s-ar calcula  $C^{-1}$  și apoi  $\underline{X}'$  prin formula  $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ , s-ar obține  $x'_1, x'_2$  și  $x'_3$  care, dacă s-ar înlocui în  $(*)$ , ar trebui să dea expresia lui  $h(\vec{x})$  de la care am plecat. **VERIFICATI!**

### Metoda lui Gauss

Contri în formarea de pătrate. Străpân toți termenii care conțin  $x_1$  (condiția ce trebuie îndeplinită este să existe  $g_{11} x_1^2 = 5x_1^2$  și să fie diferit de zero). Avem

$$h(\vec{x}) = (5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2$$

sau

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5} (25x_1^2 - 20x_1x_2 - 20x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2$$

menționăm că am efectuat operația aceasta (înmulțire și împărțire prin 5 a parantezei) pentru ca  $25x_1^2 = (5x_1)^2$ . Cu noua paranteză alcătuim un pătrat perfect. Acesta trebuie să fie  $(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2$  dacă adunăm și scădem:

$$\frac{8}{5}x_2x_3; \quad \frac{4}{5}x_2^2; \quad \frac{4}{5}x_3^2 \Rightarrow$$
$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5} (5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - \frac{8}{5}x_2x_3 - \frac{4}{5}x_2^2 - \frac{4}{5}x_3^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 \Rightarrow$$

# TEMA NR. 6

pagina 7

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5} (5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{26}{5} x_2^2 - \frac{8}{5} x_2 x_3 + \frac{16}{5} x_3^2$$

Se observă că este mai avantajos să facem pătrat perfect cu termenii  $\frac{16}{5} x_3^2 - \frac{8}{5} x_2 x_3 = \frac{1}{5} (4x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{5} x_2^2$

Prin urmare:

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{5} (5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 + \frac{1}{5} (4x_3 - x_2)^2$$

Am obținut astfel (din nou) trei pătrate perfecte (altele decât prin metoda întâia), anume

$$\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix} h(\vec{x}) = \frac{1}{5} x_1'^2 + 5x_2'^2 + \frac{1}{5} x_3'^2, \quad \text{unde}$$

$$\begin{pmatrix} ** \\ ** \\ ** \end{pmatrix} \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_2 + 4x_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X}' = C^{-1} \underline{X},$$

unde  $C$  este matricea de trecere de la baza uzuală la baza în care expresia lui  $h(\vec{x})$  are forma  $\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$ . Pentru a găsi baza în care are loc  $\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$  trebuie determinată  $C$  cunoscând că

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = (C^{-1})^{-1} \quad \det C^{-1} = 20 \Rightarrow \det C = \frac{1}{20}$$

sau, mai simplu, rezolvăm sistemul  $\begin{pmatrix} ** \\ ** \end{pmatrix}$  în funcție de  $x_1, x_2, x_3$  ca  $\underline{X} = C \underline{X}'$ . Găsim

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} x_1' + \frac{1}{2} x_2' + \frac{1}{10} x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = \frac{1}{4} x_2' + \frac{1}{4} x_3' \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Baza în care  $h$  are expresia canonică  $\begin{pmatrix} ** \\ * \end{pmatrix}$  este  $B'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  cu  $\vec{u} = \vec{e} C \Rightarrow$   
 $\vec{u}_1 = \frac{1}{5} \vec{e}_1; \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{1}{4} \vec{e}_3; \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{10} \vec{e}_1 + \frac{1}{4} \vec{e}_3$

# TEMA NR. 6

pagina 8

Metoda lui Jacobi. Calculăm valorii proprii  
extrase din  $G$ .  $\Delta_1 = |g_{11}| = 5$   $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$   
 $\Delta_3 = \det G = 80$ . Prin definiție, luăm  $\Delta_0 = 1$ .

Conform metodei lui Jacobi, există o  
bază  $B''' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  în care forma pătratică  
are expresia canonică

$$h(\vec{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \eta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \eta_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \eta_3^2,$$

unde  $\vec{x} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)_{B'''} = \eta_1 \vec{f}_1 + \eta_2 \vec{f}_2 + \eta_3 \vec{f}_3$ .

Se caută vectorii <sup>bazei</sup> noi  $B'''$  în forma (conform,  
din nou, metodei lui Jacobi)

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \kappa_{11} \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \kappa_{12} \vec{e}_1 + \kappa_{22} \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \kappa_{13} \vec{e}_1 + \kappa_{23} \vec{e}_2 + \kappa_{33} \vec{e}_3 \end{cases}$$

adică matricea de trecere  $B \xrightarrow{C} B'''$  este  
"triunghiulară superioară"

$$C = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ 0 & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix}$$

Se determină elementele lui  $C$  din condițiile:

$$\begin{matrix} (***) \\ (**)\end{matrix} \quad \begin{matrix} F(\vec{f}_1, \vec{e}_1) = 1; \\ F(\vec{f}_2, \vec{e}_1) = 0 \\ F(\vec{f}_2, \vec{e}_2) = 1 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} F(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = 0 \\ F(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 0 \\ F(\vec{f}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{matrix}$$

unde  $F(\vec{x}, \vec{y})$  este forma biliniară simetrică  
de la care provine forma pătratică  $h(\vec{x})$  (Se  
știe că  $h(\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})$ ). Se vede că  $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T G \vec{y}$ .  
Astfel întregile (\*\*\*) devin



# TEMA NR. 6

pagina 9

$$x_{11} g_{11} = 1 ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} g_{11} + x_{22} g_{21} = 0 \\ x_{12} g_{12} + x_{22} g_{22} = 1 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{13} g_{11} + x_{23} g_{21} + x_{33} g_{31} = 0 \\ x_{13} g_{12} + x_{23} g_{22} + x_{33} g_{32} = 0 \\ x_{13} g_{13} + x_{23} g_{23} + x_{33} g_{33} = 1 \end{array} \right.$$

Având în vedere că matricea  $G = \|g_{ij}\|$  este (vezi pg. 2)

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistemele}$$

$$5x_{11} = 1 ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x_{12} - 2x_{22} = 0 \\ -2x_{12} + 6x_{22} = 1 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x_{13} - 2x_{23} - 2x_{33} = 0 \\ -2x_{13} + 6x_{23} = 0 \\ -2x_{13} + 4x_{33} = 1 \end{array} \right.$$

care au respectiv soluțiile:

$$x_{11} = \frac{1}{5} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = \frac{1}{13} \\ x_{22} = \frac{5}{26} \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{13} = \frac{3}{20} \\ x_{23} = \frac{1}{20} \\ x_{33} = \frac{13}{40} \end{array} \right.$$

Prin urmare, matricea de trecere  $C$  este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{13}{40} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X} = C^{-1}$$

Deci, baza este

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = \frac{1}{5} \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \frac{1}{13} \vec{e}_1 + \frac{5}{26} \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \frac{3}{20} \vec{e}_1 + \frac{1}{20} \vec{e}_2 + \frac{13}{40} \vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{5} \eta_1 + \frac{1}{13} \eta_2 + \frac{3}{20} \eta_3 \\ x_2 = \frac{5}{26} \eta_2 + \frac{1}{20} \eta_3 \\ x_3 = \frac{13}{40} \eta_3 \end{array} \right.$$

Coordonatele vechi, adică  $x_1, x_2, x_3$ , se leagă de cele noi prin  $\underline{X} = C^{-1}$   
Aici, dacă am înlocui

în forma inițială a lui  $h(\vec{x})$  trebuie să obținem  
 $h(\vec{x}) = \frac{1}{5} \eta_1^2 + \frac{5}{26} \eta_2^2 + \frac{13}{40} \eta_3^2$  VERIFICATI!

## TEMA NR. 6

pagina 10

- (2). Să se studieze dacă endomorfismul  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
 $T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$ ,  
unde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , admite formă diagonală.

Rezolvare. Prin endomorfism se înțelege o transformare liniară pe un spațiu vectorial  $V$  peste câmpul  $\mathbb{K}$ ,  $T: V \rightarrow V$ .

Matricea  $A$  a endomorfismului este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Forma diagonală a lui  $T$  ar trebui să fie  $T(\vec{x}) = (\lambda_1 x'_1, \lambda_2 x'_2, \lambda_3 x'_3)$ , unde  $x'_1, x'_2, x'_3$  sunt coordonatele vectorului  $\vec{x}$  într-o bază  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ . Matricea  $A'$  corespunzătoare este

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

de unde se vede că  $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$ ,  $T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$ ,  $T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$ . Prin urmare  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ar trebui să fie valorile proprii ale lui  $T$  iar  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  vectorii proprii corespunzători.

Valorile proprii ale lui  $T$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice  $P(\lambda) = 0$ , unde  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$  iar  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  este matricea unitate de ordin 3.

TEMA NR. 6

pagina 11

Se găsește  $P(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$  (VERIFICATI!)

Ecuația caracteristică  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$  are rădăcinile  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  și  $\lambda_3 = 2$ .

Așadar valorile proprii ale lui  $T$  sunt  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ , și  $\lambda_3 = 2$ .

Determinăm vectorii proprii corespunzători rezolvând sistemele liniare și omogene de 3 ecuații cu 3 necunoscute:

$$(A - 1 \cdot I_3)\bar{X} = 0; \quad (A - 2I_3)\bar{X} = 0$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

un singur vector propriu  
 $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$

Vectorul propriu corespunzător este  
 $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$

Dacă ar fi existat doi vectori proprii liniar independenți corespunzători valorii proprii duble  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , atunci acesta împreună cu  $\vec{v}_3$  ar fi format o bază în care matricea  $A'$  a transformării liniare are forma diagonală  $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Cum nu există doi vectori proprii liniar independenți corespunzători valorii proprii duble  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , rezultă că  $T$  nu admite forma diagonală.

- ③. Matricea transformării liniare (endomorfismului)  
 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  în baza canonică  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0),$   
 $\vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  este

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că  $T$  este transformare liniară ortogonală.

Să se calculeze  $\|\vec{x}\|$  și  $\|T(\vec{x})\|$ , unde  $\vec{x} = (-1, 3, 1)$ , iar  $\|\cdot\|$  (norma) este indusă de produsul scalar standard (canonic) pe  $\mathbb{R}^3$ .

Rezolvare. Transformarea liniară  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  este ortogonală dacă și numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este ortogonală.

O matrice  $A$  se zice că este ortogonală dacă  $A^{-1} = A^T$ , adică dacă  $AA^T = A^T A = I_3$ .

Se știe că  $\mathcal{B}$  este bază ortonormată în produsul scalar standard  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ , unde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  și  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ .

Calculând  $A \cdot A^T$ , ca și  $A^T \cdot A$ , deducem că  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_3$ , adică  $A$  este matrice ortogonală.

Conform afirmației de mai sus  $\Rightarrow T$  ortogonală.

Norma euclidiană  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Deci  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ .

$$T(\vec{x}) = \vec{e} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \vec{e} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \left( \frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3} \right) \Rightarrow \|T(\vec{x})\| = \sqrt{11}$$

Așadar,  $\|\vec{x}\| = \|T(\vec{x})\| = \sqrt{11}$ . Se constată că  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$  vom avea  $\|\vec{x}\| = \|T(\vec{x})\|$ . Aceasta se întâmplă pentru că  $T$  este și simetric.

# TEMA NR. 6

pagina 13

4. Să se studieze dacă  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
 $T(\vec{x}) = (4x_1 - 3x_2 - 3x_3, 6x_1 - 5x_2 - 6x_3, x_3)$ ,  
 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  admite formă diagonală.

În caz afirmativ, scrieți expresia diagonală a lui  $T$  și prezentați baza în care are loc această expresie.

Rezolvare.  $T$  este endomorfism. În baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ ,  $T$  are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale lui  $T$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ .

Se găsește  $(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$ . Se vede că  $\lambda = 1$  este valoare proprie dublă, iar  $\lambda_3 = 2$  este valoare proprie simplă.

Determinăm vectorii proprii coreșpanzători:

Trebui să rezolvăm sistemele:  $(A - 1 \cdot I_3)\vec{x} = 0$

și  $(A - 2 \cdot I_3)\vec{x} = 0$ , sau

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2 + x_3$$

$$x_2 = 1, x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = 0, x_1 = \frac{3}{2}x_2$$

$$\text{Luând } x_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\vec{v}_3 = (3, 2, 0)$$

Avem  $T(\vec{v}_1) = 1 \cdot \vec{v}_1$  ;  $T(\vec{v}_2) = 1 \cdot \vec{v}_2$  ;  $T(\vec{v}_3) = 2 \cdot \vec{v}_3$   
 și  $B' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$  bază în  $\mathbb{R}^3$ . În concluzie,

## TEMA NR. 6

pagina 14

transformarea liniară admite forma diagonală

$$T(\vec{x}') = (x_1', x_2', 2x_3'),$$

unde  $\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3')$  în baza  $B'$ , iar matricea sa în baza  $B'$  formată de vectorii proprii este diagonală, adică

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Să se cerceteze dacă  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$T(\vec{x}) = (4x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$

admite formă diagonală și să se scrie această formă diagonală, dacă este cazul

Soluție. Ca și la exercitiile precedente, determinăm valorile proprii rezolvând ecuația  $P(\lambda) = 0$ . Se găsește  $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 5 = 0$  cu rădăcinile reale și distincte două câte două

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{7 - \sqrt{69}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}.$$

Folosim rezultatul: la valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenți, iar la trei valori proprii distincte două câte două vectorii proprii corespunzători formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ . Fie aceștia  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = B'$ .

În baza  $B'$  matricea  $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7 - \sqrt{69}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \end{pmatrix}$

iar expresia diagonală a lui  $T$  este

$$T(\vec{x}') = \left(-x_1', \frac{7 - \sqrt{69}}{2} x_2', \frac{7 + \sqrt{69}}{2} x_3'\right),$$

unde  $\vec{x}' = (x_1', x_2', x_3')$  în baza  $B'$ .

## TEMA NR. 6

pagina 15

⑥. Matricea transformării liniare (endomorfismului)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  este

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se afle forma diagonală a acestei matrice.

Rezolvare. Analizând celelalte probleme rezultă că forma diagonală a matricei este

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

unde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sunt valorile proprii ale endomorfismului  $T$ . Găsim ecuația caracteristică  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$  este

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$$

Această ecuație are rădăcinile reale și distincte  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$ .

Deci

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

⑦ Să se determine matricea operatorului linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(\vec{x}) = (3x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$  în baza  $\mathcal{V} = \{ \vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (2, 1, 3), \vec{v}_3 = (1, 1, 1) \} \subset \mathbb{R}^3$ .

# TEMA NR. 6

pagina 16

Rezolvare.

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \xrightarrow{C} V$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = 3 \neq 0 \Rightarrow V \text{ bază.}$$

Fie  $B$  matricea lui  $T$  în baza  $V$ . Știm că

$$B = C^{-1} A C$$

Calculăm  $C^{-1}$  scriind întâi transpusa  $C^T$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și apoi adjuncta

$$C^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3} C^*$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -19 & -20 & -11 \\ 11 & 13 & 7 \\ 30 & 21 & 12 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} T(\vec{v}_1) &= \frac{1}{3} (-19\vec{v}_1 + 11\vec{v}_2 + 30\vec{v}_3) \\ T(\vec{v}_2) &= \frac{1}{3} (-20\vec{v}_1 + 13\vec{v}_2 + 21\vec{v}_3) \\ T(\vec{v}_3) &= \frac{1}{3} (-11\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 + 12\vec{v}_3) \end{aligned}$$

Rezultă

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -\frac{11}{3} \\ 3 & 4 & \frac{7}{3} \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$



## TEMA NR. 6

pagina 17

- ④. Matricea transformării liniare (endomorfismului)  
 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  în baza canonică  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0),$   
 $\vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$  este

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Să se afle matricea  $B$  a lui  $T$  în baza

$$\mathcal{V} = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \vec{v}_3 = (2, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare. Fie  $C$  matricea de trecere de la  
baza  $\mathcal{B}$  la baza  $\mathcal{V}$ . Atunci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se știe că

$$B = C^{-1}AC.$$

Se poate determina  $B$  și pe altă cale ținând cont  
că  $B$  are pe cele trei coloane coordonatele vectorilor  
 $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), T(\vec{v}_3)$  raportați la baza  $\mathcal{V}$ . Avem

$$(*) \begin{cases} T(\vec{v}_1) = T(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2) + 3T(\vec{e}_3) \\ T(\vec{v}_2) = T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) \\ T(\vec{v}_3) = T(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 2T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + 3T(\vec{e}_3) \end{cases}$$

dar,  $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3)$  se cunosc: coordonatele  
lor în baza canonică  $\mathcal{B}$  sunt coloanele lui  $A$  ⇒

$$(**) \begin{cases} T(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ T(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \end{cases}$$

# TEMA NR. 6

pagina 18

Din  $(**)$  și  $(*)$  rezultă:

$$(**) \begin{cases} T(\vec{v}_1) = -6\vec{e}_1 - 16\vec{e}_2 - 16\vec{e}_3 \\ T(\vec{v}_2) = -2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \\ T(\vec{v}_3) = -9\vec{e}_1 - 20\vec{e}_2 - 20\vec{e}_3 \end{cases}$$

Pentru ca problema să fie rezolvată ar trebui să stăim coordonatele bazei  $\vec{v}_i$  în baza nouă, deci pe  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  exprimate ca și combinații liniare de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Aceste expresii vor rezulta din

$$(**) \begin{cases} \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \vec{v}_1 \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{v}_2 \\ 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \vec{v}_3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \vec{e}C = \vec{v} \Rightarrow \vec{e} = \vec{v}C^{-1}$$

Putem calcula  $C^{-1}$  rezolvând sistemul  $(**)$  în raport cu necunoscutele  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Obținem

$$(***) \begin{cases} \vec{e}_1 = -\frac{2}{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3 \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \frac{2}{3}\vec{v}_3 \\ \vec{e}_3 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3 \end{cases} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Înlocuim  $(***)$  în  $(**)$  și astfel obținem

$$\begin{cases} T(\vec{v}_1) = -\frac{20}{3}\vec{v}_1 - 6\vec{v}_2 + \frac{10}{3}\vec{v}_3 \\ T(\vec{v}_2) = -\frac{8}{3}\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \frac{4}{3}\vec{v}_3 \\ T(\vec{v}_3) = -\frac{22}{3}\vec{v}_1 - 9\vec{v}_2 + \frac{11}{3}\vec{v}_3 \end{cases}$$

Prin urmare

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & -6 & \frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} & -2 & \frac{4}{3} \\ -\frac{22}{3} & -9 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{non}]{\text{din}}$$

Verificați dacă rezultatul găsit pentru B este corect efectuând produsele de matrice  $C^{-1}AC$ .

## TEMA NR. 6

pagina 19

- 8) Să se determine forma diagonală a endomorfismului  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_3, x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2),$$

unde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Rezolvare. Matricea lui  $T$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$  este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

iar polinomul caracteristic  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$  are expresia  $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 5$ . Ecuația caracteristică  $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$  are rădăcinile reale distincte  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}, \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ .

Acetor rădăcini, care sunt valorile proprii ale lui  $T$  le corespund trei vectori proprii liniari independenți în  $\mathbb{R}^3$ , deci constituie o nouă bază. În această bază, matricea lui  $T$  are forma diagonală

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}.$$

- 9) Să se arate că  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_3, -6x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

este un automorfism (endomorfism inversabil)

și să se calculeze  $T(\vec{x}), T^{-1}(\vec{x})$  dacă  $\vec{x} = (-2, -1, 2)$ .

Rezolvare Ecuația vectorială a endomorfismului  $T$  este  $\vec{y} = T(\vec{x})$ , unde  $T(\vec{x}) = \vec{e}(A\vec{x})$ , unde

# TEMA NR. 6

pagina 20

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  este matricea lui  $T$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ , iar  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului arbitrar  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \vec{e} X$ ;  $Y$  este matricea coloană a vectorului imagine  $\vec{y} = T(\vec{x})$ , adică  $\vec{y} = \vec{e} Y$ .

Din ecuația vectorială  $\vec{y} = T(\vec{x})$  obținem pe cea matriceală  $Y = AX$ .

Pentru ca  $T$  să fie inversabil trebuie ca din  $\vec{y} = T(\vec{x})$  să putem scoate în mod unic pe  $\vec{x}$  și anume  $\vec{x} = T^{-1}(\vec{y})$ . Luând în calcul că matriceală amintim că acest lucru este posibil dacă și numai dacă  $A$  este matrice inversabilă. Calculând  $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ .

Există  $T^{-1}(\vec{x}) = \vec{e} (A^{-1}X)$ .

$$T(\vec{x}) = T(-2, -1, 2) = \vec{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e} \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} = -4\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-4, 17, -1). \text{ Atadar}$$

$$T(\vec{x}) = (-4, +17, -1).$$

Calculând inversa lui  $A$  găsim  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$T^{-1}(\vec{x}) = (-3, 6, -1) = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

- (10) Să se determine câte o bază în nucleul  $\text{Ker } T$  și imaginea  $\text{Im } T$  ale operatorului linear (transformarea linieară, endomorfismul)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , unde  $T(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, x_2 + 2x_3)$ , unde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

# TEMA NR. 6

pagina 21

Amintim că:  $\text{Ker } T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$  și  
 $\text{Im } T = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.i. } T(\vec{x}) = \vec{y} \}$

Priu urmare, trebuie să aflăm soluțiile ecuației vectoriale  $T(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Din ultimele două ecuații rezultă  $x_1 = 0$  și deci  $x_2 = -2x_3$  care introdusă în prima ecuație dă  $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Așadar  $\text{Ker } T = \{ \vec{0} \} \Rightarrow \dim \text{Ker } T = 0 = d =$   
 $= \text{defectul lui } T \Rightarrow \text{Im } T = \mathbb{R}^3$ . O bază în  $\text{Im } T$   
 poate fi chiar baza canonică.

11) Să se determine endomorfismul  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 cunoscând că  $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ ,  $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$ ,  $T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3$ ,  
 unde  $\vec{v}_1 = (-1, 0, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 3, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (3, 1, 1)$  și  
 $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (0, 5, 1)$ ,  $\vec{w}_3 = (3, 7, -2)$ .

Rezolvare. Trebuie determinate vectorii  $T(\vec{e}_1)$ ,  
 $T(\vec{e}_2)$ ,  $T(\vec{e}_3)$  pentru a putea scrie expresia  
 operatorului liniar  $T$ . Acești vectori vor rezulta  
 din sistemul  $\begin{cases} T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1 \\ T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2 \\ T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_3) = \vec{w}_1 \\ 2T(\vec{e}_1) + 3T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) = \vec{w}_2 \\ 3T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) + T(\vec{e}_3) = \vec{w}_3 \end{cases}$

Rezolvând sistemul, găsim

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) = -\frac{1}{8}(w_1 + w_2 - 3w_3) = (1, 2, -1) \\ T(\vec{e}_2) = -\frac{1}{16}(w_1 - 7w_2 + 5w_3) = (-1, 0, 1) \\ T(\vec{e}_3) = \frac{1}{16}(7w_1 - w_2 + 3w_3) = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresia lui  $T(\vec{x})$  este

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, -x_1 + x_2)$$

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

- ① Să se aducă la forma canonică prin metoda lui Gauss, forma pătratică  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(\vec{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3,$$

precizându-se și baza în care are loc forma canonică determinată.

Indicație. Se grupează primii trei termeni, se adună și se scade ce-i nevoie pentru a forma un trinom la pătrat. Cu termenii rămași, care nu mai au  $x_1$ , ca factor, se procedează similar. ✓

Răspuns.  $h(\vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 24y_3^2$ , unde 
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_2 + 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$
 sau  $Y = C^{-1}X$ . Se găsește  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și deci

baza în care are loc expresia canonică de mai sus este  $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$   $\vec{f} = \vec{e}C \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -15\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$

- ② Să se afle matricea endomorfismului  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  știind că  $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ ,  $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$ ,  $T(\vec{v}_3) = \vec{w}_3$ , unde  $\vec{v}_1 = (2, 3, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 0, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (3, 1, 1)$   
 $\vec{w}_1 = (0, 5, 1)$ ,  $\vec{w}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{w}_3 = (3, 7, -2)$ .

Indicație. Vezi exercitiul ⑪ de la pagina 21, Tema 6.

- ③ Fie operatorul linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  
 $T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 - 4x_3)$ , unde  
 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Să se determine câte o bază în  $\text{Ker } T$  și  $\text{Im } T$  și să se arate că  $T$  nu este nici injectivă, și nici aplicatie surjectivă.

# TEMA NR. 6

pagina 23

- ④ Matricea operatorului linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  în baza canonică este  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii.  
Să se precizeze dacă matricea lui  $T$  într-o anumită bază poate fi diagonală.

Indicație. Vezi exercitiul (2), pagina 10, TEMA NR. 6.

- ⑤. Fie operatorul linear  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  
 $T(\vec{x}) = (x_1 + x_2, x_1, x_2)$

Să se determine  $\text{Ker } T$ ,  $\text{Im } T$  și să se arate că  $T$  este injectivă dar nu și surjectivă.

Indicație Arătați că  $\text{Ker } T = \{\vec{0}\}$  (simplu) de unde rezultă  $T$  injectivă și defectul este 0,  $d=0$ . Știm că  $\text{rang} + \text{defect} = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \text{rang} = 2$ . Dar  $\text{rang} = \dim \text{Im } T \Rightarrow \dim \text{Im } T = 2$  și  $\text{Im } T \subset \mathbb{R}^3$  adică  $\text{Im } T$  este un subspațiu linear strict al lui  $\mathbb{R}^3$ , ca atare nu poate fi surjectivă.

- ⑥ Să se arate că transformarea liniară  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3)$  este un izomorfism  
și să se afle matricea lui  $T$  în baza  
 $\mathcal{B}' = \{ \vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (2, 1, 3), \vec{v}_3 = (1, 1, 1) \}$ .

- ⑦ Să se aducă la forma canonică prin două metode, forma pătratică  
 $h(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ .

⑧. Să se arate că transformarea (funcția)  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

nu este un izomorfism și apoi să se determine câte o bază în nucleul  $\text{Ker } T$  și imaginea  $\text{Im } T$  ale lui  $T$ .

Răspuns  $T$  este endomorfism pt că  $T(\vec{x}) = \vec{e}(A\vec{x})$ , unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⑨. Să se aducă la expresia (forma) canonică, prin toate metodele cunoscute, forma pătratică  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(\vec{x}) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 4x_2 x_3,$$

$$\text{unde } \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Indicație. Pentru a aplica metoda lui Gauss (formare de pătrate) se efectuează întâi schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

În acest fel  $h(\vec{x}) = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1 y_3 - 6y_2 y_3$  și de aici înc înainte se aplică metoda lui Gauss. (vezi seminar m. 5 studenți grupa 8102).

⑩. Să se determine câte o bază în nucleul  $\text{Ker } T$  și  $\text{Im } T$  ale operatorului liniar  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3).$$